随伴の双圏

El Pin Al*

https://elpinal.gitlab.io/notes/bicat-of-adjunctions.pdf

2022 年 12 月 19 日

目次

これは「圏論 Advent Calendar 2022」19 日目の記事です。

本稿では、対象を「双圏 $\mathbb{B}$ における随伴」、射を「随伴の pseudo map」とする双圏 $\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ を定義します。主な疑問は、この双圏の 2-cell としてどんな概念が適切かということです。

本稿は univalent foundations で圏を扱いますが、タイムリーなことに（タイトルから何となく予想はしていましたが）、Uemura さんが『「正しい」圏論』という記事を出されているので、そちらも合わせて読んでください。

1 はじめに

任意の双圏 $\mathbb{B}$ が与えられたとき、その中での**随伴**を考えることができる。たとえば、随伴関手とは、双圏 **Cat** での随伴のことであった。

随伴の双圏として想定されるものとしては、nLab [6] に書いてあるように、少なくとも 2 通りあり、1 つは射が随伴であるもので、もう 1 つは対象が随伴であるものである。本稿では後者を扱う。

双圏 (bicategory) に馴染みのない読者は nLab の当該記事 [7] や Johnson and Yau [4] を見ること。

* @elpinal@mathstodon.xyz

1.1　基礎づけについて

本稿の内容は基礎づけによらないものの、ここでは homotopy type theory [10, 9] などの univalent foundations に基づく。これは好みによるものなので、traditional な集合論を利用しても問題ないはずである。

前提知識としては、少なくとも Martin-Löf type theory に慣れていることが望ましい。

記法 1.1（Identity type）　型 A と 2 つの項 $x, y : A$ について、intensional identity type を $\mathsf{Id}_A(x, y)$ と書く。

定義 1.2（命題 [10, Definition 3.3.1]）　A を型とする。任意の $x, y : A$ について、型 $\mathsf{Id}_A(x, y)$ を持つ項を選択できるとき、A を**命題** (*proposition* あるいは *h-proposition*) と呼ぶ。

定義 1.3（集合 [10, Definition 3.1.1]）　A を型とする。任意の $x, y : A$ と $p, q : \mathsf{Id}_A(x, y)$ について、型 $\mathsf{Id}_{\mathsf{Id}_A(x,y)}(p, q)$ を持つ項を選択できるとき、A を**集合** (*set* あるいは *h-set*) と呼ぶ。

集合 A, B と関数 $f : A \to B$ について、「f が同型である」という型は命題であるが、A, B が一般の型であった場合、この型は命題になるとは限らない。したがって、高次元の型に対してよく振る舞う「同型」の概念として、equivalence を定義する。Equivalence にはいくつかの定義が存在するが、ここでは fiber と可縮性を用いた定義をする。

定義 1.4（Fiber）　A, B を型とする。関数 $f : A \to B$ の $y : B$ における *fiber* $\mathsf{fib}_f(y)$ を次のように定義する。

$$\mathsf{fib}_f(y) \overset{\text{def}}{=} \sum_{x:A} (\mathsf{Id}(fx, y))$$

定義 1.5（可縮）　A を型とする。A の項 x を選択することができ、かつ、任意の $y : A$ について型 $\mathsf{Id}_A(x, y)$ を持つ項を選択できるとき、A が**可縮** (*contractible*) である、という。

定義 1.6（Equivalence）　A, B を型とする。関数 $f : A \to B$ が *equivalent* であるとは、任意の $y : B$ について、$\mathsf{fib}_f(y)$ が可縮であることである。

ここでの equivalence は、論理的同値性 (logical equivalence) よりずっと強い概念であり、ホモトピー論におけるホモトピー同値性 (homotopy equivalence) に近い。

2　圏と双圏

まず、圏を定義する。HoTT book ではこれを precategory と呼んでいる。

定義 2.1（圏 [10, Definition 9.1.1]）　圏 $\mathbb{C}$ は以下のデータから成り、

(i) 型 $\mathsf{Ob}(\mathbb{C})$ (この型を持つ項を「対象」と呼ぶ。)
(ii) 各対象 a, b について、集合 $\mathsf{Hom}_{\mathbb{C}}(a, b)$ (この集合の要素 f を「(a から b への) 射」と呼び、$f : a \to b$ と書く。)
(iii) 各対象 a について、射 $\mathrm{id}_a : a \to a$
(iv) 各対象 a, b, c と射 $f : a \to b$ と $g : b \to c$ について、射 $g \circ f : a \to c$

以下の性質を持つ。

(i) $\mathrm{id} \circ f = f \circ \mathrm{id} = f$
(ii) $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

定義 2.2（同型射）　$\mathbb{C}$ を圏とする。射 $f : a \to b$ 上の**同型構造** (*isomorphism structure*) は、データ

(i) $g : b \to a$

であって、性質

(i) $g \circ f = \mathrm{id}_a$
(ii) $f \circ g = \mathrm{id}_b$

を満たすものである。簡単な計算により、同型構造が命題であることが分かるので、f 上の同型構造が存在するとき、$f : a \to b$ を**同型射**と呼ぶ。

定義 2.3（同型）　圏 $\mathbb{C}$ において、対象 a から対象 b への同型射を選択できるとき、a と b が**同型**であるといい、その型を $\mathsf{Iso}(a, b)$ と書く。この型は集合である。

定義 2.4（idtoiso [10, Lemma 9.1.4]）　圏 $\mathbb{C}$ の各対象 a, b について、関数 $\mathsf{idtoiso}_{a,b} : \mathsf{Id}(a, b) \to \mathsf{Iso}(a, b)$ を帰納的に定義する。

$$\mathsf{idtoiso}_{a,a}(\mathsf{refl}) = \mathrm{id}_a$$

次に、univalent category を定義する。HoTT book ではこれを単に「圏」と呼んでいる。

定義 2.5（Univalent category [10, Definition 9.1.6]）　圏 $\mathbb{C}$ が *univalent* であるとは、任意の対象

a, b について、$\mathsf{idtoiso}_{a,b} : \mathsf{Id}(a,b) \to \mathsf{Iso}(a,b)$ が equivalent であることである。

定義 2.6（双圏） **双圏** $\mathbb{B}$ は以下のデータから成り、

(i) 型 $\mathsf{Ob}(\mathbb{B})$ (この型を持つ項を「対象」と呼ぶ。)

(ii) 各対象 a, b について、圏 $\mathsf{Hom}_{\mathbb{B}}(a,b)$ (この圏の対象 f を「(a から b への) 射」と呼び、$f : a \to b$ と書く。この圏の射 θ を「2-cell」と呼ぶ。)

(iii) 各対象 a について、関手 $\mathrm{id}_a : \mathbf{1} \to \mathsf{Hom}(a,a)$

(iv) 各対象 a, b, c について、関手 $C_{a,b,c} : \mathsf{Hom}(b,c) \times \mathsf{Hom}(a,b) \to \mathsf{Hom}(a,c)$

(v) left unitor: invertible 2-cell $\lambda_f : \mathrm{id} \circ f \Rightarrow f$

(vi) right unitor: invertible 2-cell $\rho_f : f \circ \mathrm{id} \Rightarrow f$

(vii) associator: invertible 2-cell $\alpha_{f,g,h} : (h \circ g) \circ f \Rightarrow h \circ (g \circ f)$

適切な性質を満たすものである。(詳細は [1] から参照されている UniMath library を見よ。)

記法 2.7 双圏において、射の合成 $C_{a,b,c}(g,f)$ を $g \circ f$ と書く。また、2-cell の水平合成 $C_{a,b,c}(\beta,\alpha)$ を $\beta * \alpha$ と書く。

定義 2.8（Whiskering） $\mathbb{B}$ を双圏とする。図式

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "f"] & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\theta"] & c \arrow[r, "i"] & d \end{tikzcd}$$

について、

$$\theta \triangleright f \stackrel{\text{def}}{=} \theta * \mathrm{id}_f$$
$$i \triangleleft \theta \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{id}_i * \theta$$

と定義する。

定義 2.9（Invertible 2-cell） 2-cell が *invertible* であるとは、その 2-cell が Hom 圏における同型であることである。

定義 2.10（Adjoint equivalence） $\mathbb{B}$ を双圏、$f : a \to b$ を射とする。データ

(i) 射 $g : b \to a$

(ii) invertible 2-cell $\eta : \mathrm{id}_a \to g \circ f$

(iii) invertible 2-cell $\epsilon : f \circ g \to \mathrm{id}_b$

を選択でき、2 つの図式

$$
\begin{tikzcd}
f \circ (g \circ f) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{f,g,f}"] & (f \circ g) \circ f \arrow[d, "\epsilon \triangleright f"] \\
f \circ \mathrm{id}_a \arrow[u, "f \triangleleft \eta"] & \mathrm{id}_b \circ f \arrow[d, "\lambda_f"] \\
f \arrow[u, "\rho_f^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_f"'] & f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(g \circ f) \circ g \arrow[r, "\alpha_{g,f,g}"] & g \circ (f \circ g) \arrow[d, "g \triangleleft \epsilon"] \\
\mathrm{id}_a \circ g \arrow[u, "\eta \triangleright g"] & g \circ \mathrm{id}_b \arrow[d, "\rho_g"] \\
g \arrow[u, "\lambda_g^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_g"'] & g
\end{tikzcd}
$$

が可換であるとき、f を *adjoint equivalence* と呼ぶ。また、対象 a から b への adjoint equivalence 全体の型を $\mathsf{AdjEquiv}(a, b)$ と書く。

補題 2.11 恒等射は adjoint equivalence である。

定義 2.12（idtoeq） 双圏 $\mathbb{B}$ の各対象 a, b について、関数 $\mathsf{idtoeq}_{a,b} : \mathsf{Id}(a, b) \to \mathsf{AdjEquiv}(a, b)$ を帰納的に定義する。

$$\mathsf{idtoeq}_{a,a}(\mathsf{refl}) = \mathrm{id}_a$$

定義 2.13（Univalent bicategory） 双圏 $\mathbb{B}$ が *locally univalent* であるとは、各圏 $\mathsf{Hom}(a, b)$ が univalent であることである。

双圏 $\mathbb{B}$ が *globally univalent* であるとは、関数 $\mathsf{idtoeq}_{a,b} : \mathsf{Id}(a, b) \to \mathsf{AdjEquiv}(a, b)$ が equivalent であることである。

双圏 $\mathbb{B}$ が *univalent* であるとは、locally univalent かつ globally univalent であることである。

3 随伴

定義 3.1（随伴） 双圏 $\mathbb{B}$ における**随伴** $(a, b, f, g, \eta, \epsilon)$ とは、

(i) 2 つの対象 a, b

(ii) 射 $f : a \to b$ と $g : b \to a$

(iii) 2-cell $\eta : \mathrm{id}_a \Rightarrow g \circ f$ と $\epsilon : f \circ g \Rightarrow \mathrm{id}_b$

であって、次の 2 つの図式が可換になるものである。

$$
\begin{tikzcd}
f \circ (g \circ f) \arrow[r, "\alpha^{-1}_{f,g,f}"] & (f \circ g) \circ f \arrow[d, "\epsilon \triangleright f"] \\
f \circ \mathrm{id}_a \arrow[u, "f \triangleleft \eta"] & \mathrm{id}_b \circ f \arrow[d, "\lambda_f"] \\
f \arrow[u, "\rho_f^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_f"'] & f
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
(g \circ f) \circ g \arrow[r, "\alpha_{g,f,g}"] & g \circ (f \circ g) \arrow[d, "g \triangleleft \epsilon"] \\
\mathrm{id}_a \circ g \arrow[u, "\eta \triangleright g"] & g \circ \mathrm{id}_b \arrow[d, "\rho_g"] \\
g \arrow[u, "\lambda_g^{-1}"] \arrow[r, "\mathrm{id}_g"'] & g
\end{tikzcd}
$$

以下では、随伴を (a, b, f, g) のように表わし、η と ϵ がどの随伴に属するかは読者に推論してもらう。

次に、随伴の pseudo map を定義する。これは、Jacobs [3] が随伴関手に対して定義したものの一般化である。

定義 3.2（随伴の pseudo map） 双圏 $\mathbb{B}$ において、随伴 (a, b, f, g) から随伴 (a', b', f', g') への *pseudo map* とは、以下のデータから成り、

(i) 射 $k : a \to a'$

(ii) 射 $l : b \to b'$

(iii) invertible 2-cell $\phi : f' \circ k \Rightarrow l \circ f$

図式で表すと、

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\phi}{\Nearrow}"] & b \arrow[d, "l"] \\
a' \arrow[r, "f'"'] & b'
\end{tikzcd}
$$

となる。

(iv) invertible 2-cell $\psi : g' \circ l \Rightarrow k \circ g$

図式で表すと、

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\overset{\psi}{\Nwarrow}"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "l"] \\
a' & b' \arrow[l, "g'"]
\end{tikzcd}
$$

となる。

以下の性質を満たす。

(i) 次の図式が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{a'} \circ k \arrow[r, "\eta \triangleright k"] & (g' \circ f') \circ k \arrow[d, "\alpha_{k,f',g'}"] \\
 & g' \circ (f' \circ k) \arrow[d, "g' \triangleleft \phi"] \\
k \arrow[uu, "\lambda_k^{-1}"] \arrow[ddd, "\rho_k^{-1}"'] & g' \circ (l \circ f) \arrow[d, "\alpha^{-1}_{f,l,g'}"] \\
 & (g' \circ l) \circ f \arrow[d, "\psi \triangleright f"] \\
 & (k \circ g) \circ f \arrow[d, "\alpha_{f,g,k}"] \\
k \circ \mathrm{id}_a \arrow[r, "k \triangleleft \eta"] & k \circ (g \circ f)
\end{tikzcd}
$$

この可換図式を pasting diagram で書き直すと、以下のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f"] & & a' \arrow[rr, "\mathrm{id}_{a'}"] \arrow[dr, "f'"'] \arrow[dl, phantom, "\Swarrow\phi"] & & a' \\
 & b \arrow[rr, "l"] \arrow[drr, bend right, "g"'] & & b' \arrow[ur, "g'"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\psi"] & \\
 & & & a \arrow[uur, bend right, "k"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\mathrm{id}_a"] \arrow[dr, "f"'] & & a \arrow[r, "k"] & a' \\
 & b \arrow[ur, "g"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] & &
\end{tikzcd}
$$

(ii) 次の図式が可換になる。

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{id}_{b'} \circ l \arrow[dd, "\lambda_l"] & (f' \circ g') \circ l \arrow[l, "\epsilon \triangleright l"'] \\
 & f' \circ (g' \circ l) \arrow[u, "\alpha^{-1}_{l,g',f'}"'] \\
l & f' \circ (k \circ g) \arrow[u, "f' \triangleleft \psi^{-1}"'] \\
 & (f' \circ k) \circ g \arrow[u, "\alpha_{g,k,f'}"'] \\
 & (l \circ f) \circ g \arrow[u, "\phi^{-1} \triangleright g"'] \\
l \circ \mathrm{id}_b \arrow[uuu, "\rho_l"] & l \circ (f \circ g) \arrow[u, "\alpha^{-1}_{g,f,l}"'] \arrow[l, "l \triangleleft \epsilon"]
\end{tikzcd}
$$

この可換図式を pasting diagram で書き直すと、以下のようになる。

$$
\begin{tikzcd}
& & & b \arrow[ddr, bend left, "l"] \arrow[d, phantom, "\phi^{-1}\Downarrow"] & \\
& a \arrow[urr, bend left, "f"] \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, phantom, "\Searrow\psi^{-1}"] & & a' \arrow[dr, "f'"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \\
b \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "l"'] & & b' \arrow[ur, "g'"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_{b'}"'] & & b'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& a \arrow[dr, "f"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & & \\
b \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_b"'] & & b \arrow[r, "l"] & b'
\end{tikzcd}
$$

構成 3.3（Mates correspondence） 随伴の pseudo map の定義 3.2 のデータ (i)–(ii) が与えられたとき、データ (iii) とデータ (iv) の間に全単射を構成できる。さらに、この全単射で関連付けられたデータ (iii)–(iv) が追加で与えられたとき、性質 (i) と性質 (ii) は論理的同値である。

より正確には、データ (iii) の型を D_1、データ (iv) の型を D_2 とし、$x : D_1$ と $y : D_2$ に対して、性質 (i) を $P_1(x, y)$、性質 (ii) を $P_2(x, y)$ と書くと、同型関数

$$f : D_1 \to D_2$$

を構成でき、命題

$$\prod_{x:D_1} (P_1(x, fx) \Leftrightarrow P_2(x, fx))$$

が成り立つ。（ここで、$\Leftrightarrow$ は論理的同値を表す。）

証明 この対応は *mates correspondence* として知られている。証明は [5, 2] などを参照。 □

定義 3.4（Pseudo map 間の射） 双圏 $\mathbb{B}$ において、2 つの随伴 (a, b, f, g) と (a', b', f', g') が与えられたとする。(a, b, f, g) から (a', b', f', g') への 2 つの pseudo map (k, l) と (k', l') が与えられたとする。これらの pseudo map 間の射を次のように定義する。

(i) 2-cell $\xi : k \Rightarrow k'$
(ii) 2-cell $\chi : l \Rightarrow l'$

であって、

(i)

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\phi\Nearrow"] & b \arrow[d, bend right, "l"'] \arrow[d, bend left, "l'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\chi}{\Rightarrow}"] \\
a' \arrow[r, "f'"'] & b'
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, bend right, "k"'] \arrow[d, bend left, "k'"] \arrow[d, phantom, "\overset{\xi}{\Rightarrow}"] \arrow[dr, phantom, "\phi\Nearrow"] & b \arrow[d, "l'"] \\
a' \arrow[r, "f'"'] & b'
\end{tikzcd}
$$

(ii)

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, bend right, "k'"'] \arrow[d, bend left, "k"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \xi"] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, bend left, "l"] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow \psi"] \\
a' & b' \arrow[l, "g'"]
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
a \arrow[d, bend right, "k'"'] & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, bend right, "l'"'] \arrow[d, bend left, "l"] \arrow[d, phantom, "\Leftarrow \chi"] \arrow[dl, phantom, "\Nwarrow \psi"] \\
a' & b' \arrow[l, "g'"]
\end{tikzcd}
$$

定義 3.5（Pseudo map の圏）　双圏 $\mathbb{B}$ において、2 つの随伴 (a, b, f, g) と (a', b', f', g') が与えられたとする。以下のように圏を定義する。

(i) 対象：(a, b, f, g) から (a', b', f', g') への pseudo map (k, l)
(ii) (k, l) から (k', l') への射：定義 3.4
(iii) 恒等射：$\mathrm{id}_{(k,l)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{id}_k, \mathrm{id}_l)$
(iv) 射の合成：$(\xi', \chi') \circ (\xi, \chi) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\xi' \circ \xi, \chi' \circ \chi)$

予想 3.6　双圏 $\mathbb{B}$ が locally univalent であるとき、pseudo map の圏は univalent である。

定義 3.7（Pseudo map の合成）　双圏 $\mathbb{B}$ において、3 つの随伴

(i) (a, b, f, g)
(ii) (a', b', f', g')
(iii) (a'', b'', f'', g'')

と 2 つの pseudo map

(i) $(k, l, \phi, \psi) : (a, b, f, g) \to (a', b', f', g')$
(ii) $(k', l', \phi', \psi') : (a', b', f', g') \to (a'', b'', f'', g'')$

が与えられたとする。次の pasting diagram で表されるような、pseudo map の射 $(l' \triangleleft \phi) \circ (\phi' \triangleright k)$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[r, "f"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\phi \Nearrow"] & b \arrow[d, "l"] \\
a' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "k'"'] \arrow[dr, phantom, "\phi' \Nearrow"] & b' \arrow[d, "l'"] \\
a'' \arrow[r, "f''"] & b''
\end{tikzcd}
$$

と、次の pasting diagram で表されるような、pseudo map の射 $(k' \triangleleft \psi) \circ (\psi' \triangleright l)$

$$\begin{tikzcd}
a & b \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "l"] \\
a' \arrow[u, phantom] & b' \arrow[l, "g'"'] \arrow[d, "l'"] \\
a'' & b'' \arrow[l, "g''"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{array}{ccc} a & \xleftarrow{g} & b \\ {\scriptstyle k}\downarrow & \Nwarrow\psi & \downarrow{\scriptstyle l} \\ a' & \xleftarrow{g'} & b' \\ {\scriptstyle k'}\downarrow & \Nwarrow\psi' & \downarrow{\scriptstyle l'} \\ a'' & \xleftarrow{g''} & b'' \end{array}$$

を用いて、pseudo map の合成を $(k' \circ k, l' \circ l, (l' \triangleleft \phi) \circ (\phi' \triangleright k), (k' \triangleleft \psi) \circ (\psi' \triangleright l))$ とする。

定義 3.8（随伴の双圏） 双圏 $\mathbb{B}$ が与えられたとき、以下の双圏 $\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ を定義する。

(i) 対象：$\mathbb{B}$ における随伴 (a, b, f, g)

(ii) Hom 圏：Pseudo map の圏（定義 3.5）

(iii) 恒等射：$\mathrm{id}_{(a,b,f,g)} \stackrel{\mathrm{def}}{=} (\mathrm{id}_a, \mathrm{id}_b, \lambda_f^{-1} \circ \rho_f, \lambda_g^{-1} \circ \rho_g)$

(iv) 射の合成：Pseudo map の合成（定義 3.7）

(v) 2-cell の水平合成：$\mathbb{B}$ における 2-cell の水平合成を点ごとに行なう。

(vi) left unitor: (λ_k, λ_l)

(vii) right unitor: (ρ_k, ρ_l)

(viii) associator: $(\alpha_{k'',k',k}, \alpha_{l'',l',l})$

予想 3.9 双圏 $\mathbb{B}$ が univalent であるとき、随伴の双圏は univalent である。

Schanuel and Street [8] は *free adjunction* という 2-圏 **Adj** を定義し、そこから $\mathbb{B}$ への 2-関手が、$\mathbb{B}$ における随伴と対応することを見た。したがって、上記の双圏 $\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ の定義を正当化するためには、free adjunction を双圏として定義した上で、$\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ が次のような「pseudofunctor の双圏 $[\mathbf{Adj}, \mathbb{B}]$」と biequivalent であることを示す必要があるだろう。

(i) 対象：pseudofunctor $\mathbf{Adj} \to \mathbb{B}$

(ii) 射：pseudotransformation

(iii) 2-cell: modification

本稿では執筆時間の都合により、このような正当化を future work とする。

4 Future work

Double category 本稿では主に双圏を扱ったが、より良い概念とされている**二重圏** (*double category*) について考えると面白いかもしれない。実際、圏を対象、関手を射、随伴関手を

proarrow、自然変換を 2-cell とする二重圏を扱う文献 [5] がある。しかしながら、関手の equality について考えないためには、二重圏ではなく *double **bi**category* を用いるべきかもしれない。さらに、univalent foundations における二重圏や double bicategory を定義している文献は現時点では見たことがないので、定義から模索する必要がある。

Fibration　双圏 $\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ では、双圏 $\mathbb{B}$ を固定していたので、何らかの fibration の fibre bicategory と見なせそうである。ところが、その fibration の base は対象として双圏を持たないといけないが、（小さい）双圏全体のあつまりとして自然な概念は双圏ではなく tricategory となる。Tricategory の扱いは双圏のそれと比べてかなり複雑であることが予想される。

一方、$\mathbf{Adj}(\mathbb{B})$ 自体を何らかの fibration と見なすことが可能かもしれない。たとえば、$\mathbb{B}$ の特定の対象 a, b を固定して、「随伴 (a, b, f, g) を成すような $\mathbb{B}$ の射 f, g」を対象とする双圏を、fibre bicategory として得られる可能性がある。あるいは、特定のモナド（あるいは特定のコモナド）を定義するような随伴だけを考えられるかもしれない。

5　おわりに

本稿について、何かあれば Mastodon（@elpinal@mathstodon.xyz）まで。（日本の数学系の人がもっと Fediverse（Mastodon や Misskey など）に参加してくれると嬉しいなと思っています。）

References

[1]Benedikt Ahrens, Dan Frumin, Marco Maggesi, Niccolò Veltri, and Niels van der Weide. “Bicategories in univalent foundations”. In: *Mathematical Structures in Computer Science* 31.10 (2021), pp. 1232–1269. DOI: `10.1017/S0960129522000032` (cit. on p. 4).

[2]Eugenia Cheng, Nick Gurski, and Emily Riehl. “Cyclic multicategories, multivariable adjunctions and mates”. In: *Journal of K-Theory* 13.2 (2014), pp. 337–396. DOI: `10.1017/is013012007jkt250` (cit. on p. 8).

[3]Bart Jacobs. “Comprehension categories and the semantics of type dependency”. In: *Theoretical Computer Science* 107.2 (1993), pp. 169–207. ISSN: 0304-3975. DOI: `https://doi.org/10.1016/0304-3975(93)90169-T`. URL: `https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030439759390169T` (cit. on p. 6).

[4]Niles Johnson and Donald Yau. *2-Dimensional Categories*. 2020. DOI: `10.48550/ARXIV.2002.06055`. URL: `https://arxiv.org/abs/2002.06055` (cit. on p. 1).

[5]G. M. Kelly and Ross Street. “Review of the elements of 2-categories”. In: *Category Seminar*. Ed. by Gregory M. Kelly. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1974, pp. 75–103. ISBN: 978-3-540-37270-7. DOI: `10.1007/BFb0063101` (cit. on pp. 8, 11).

[6]nLab authors. *2-category of adjunctions*. `https://ncatlab.org/nlab/show/2-category+of+adjunctions`. Revision 7. Dec. 2022 (cit. on p. 1).

[7] nLab authors. *bicategory*. `https://ncatlab.org/nlab/show/bicategory`. Revision 60. Dec. 2022 (cit. on p. 1).

[8] Stephen Schanuel and Ross Street. "The free adjunction". In: *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 27.1 (1986), pp. 81–83. URL: `http://archive.numdam.org/item/CTGDC_1986__27_1_81_0/` (cit. on p. 10).

[9] Mike Shulman. *The HoTT Book does not define HoTT*. 2015. URL: `https://homotopytypetheory.org/2015/01/07/the-hott-book-does-not-define-hott/` (visited on 12/11/2022) (cit. on p. 2).

[10] The Univalent Foundations Program. *Homotopy Type Theory: Univalent Foundations of Mathematics*. Institute for Advanced Study: `https://homotopytypetheory.org/book`, 2013 (cit. on pp. 2, 3).