Regular Category

El Pin Al

2022 年 10 月 17 日

目次

本稿は regular category への理解を深めるための不完全な文書です。主に van Oosten [2] や Jacobs [1] を参考にしています。

1 Regular Category

定義 1.1（正則エピ） 圏 $\mathcal{C}$ において、射 $e : A \to B$ が**正則エピ** (regular epimorphism) であるとは、対象 C と 2 つの射 $f, g : C \to A$ が存在して、以下の図式がコイコライザになることである。

$$C \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A \xrightarrow{e} B$$

補題 1.2 任意の正則エピはエピ射である。

証明 簡単。 □

定義 1.3（Regular Category） 圏 $\mathcal{C}$ が regular category であるとは、以下のすべての条件を満たすことである。

(i) $\mathcal{C}$ は有限完備 (finitely complete) である。
(ii) 任意のカーネル対がコイコライザを持つ。すなわち、任意の射 $f : A \to B$ について、以下の引

き戻し図式における g と h がコイコライザを持つ。

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

(iii) 正則エピの、任意の射に沿った引き戻しもまた正則エピである。すなわち、任意の正則エピ e について、以下の引き戻し図式における f も正則エピになる。

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "e"] \\ C \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

補題 1.4　$\mathcal{C}$ を regular category とする。$\mathcal{C}$ の正則エピ $e : A \to B$ について、射 $e \times e : A \times A \to B \times B$ もまた正則エピである。

補題 1.5（Image Factorization）　Regular category $\mathcal{C}$ において、任意の射 $f : A \to B$ は正則エピ $e : A \to \mathrm{im}(f)$ とモノ射 $m : \mathrm{im}(f) \to B$ に分解される。

証明　まず、f の f 自身に沿った引き戻し

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \tag{1}$$

を取る。Regular category の定義 1.3 (ii) より、このカーネル対 p, q は以下のようなコイコライザ e を持つ。

$$\begin{tikzcd} A \times_B A \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & A \arrow[r, "e"'] & C \end{tikzcd}$$

可換図式 1 より $f \circ p = f \circ q$ であるので、コイコライザの普遍性により、$f = m \circ e$ となる一意の射 $m : C \to B$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} & & B \\ A \times_B A \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & A \arrow[r, "e"'] \arrow[ur, "f"] & C \arrow[u, dashed, "m"'] \end{tikzcd}$$

次に、m がモノ射であることを示す。対象 D と 2 つの射 $g, h : D \to C$ が存在して $m \circ g = m \circ h$ が成り立つとする。すると、引き戻し

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "t"] \arrow[d, "\langle r,s \rangle"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & D \arrow[d, "\langle g,h \rangle"] \\ A \times A \arrow[r, "e \times e"'] & C \times C \end{tikzcd}$$

を取ることで、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} f \circ r &= m \circ e \circ r \\ &= m \circ g \circ t \\ &= m \circ h \circ t \\ &= m \circ e \circ s \\ &= f \circ s \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "s"] \arrow[d, "r"'] & A \arrow[d, "f"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

が可換になる。したがって、引き戻し 1 の普遍性により、$r = p \circ u$ かつ $s = q \circ u$ となる一意の射 $u : E \to A \times_B A$ が存在する。これにより、以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} g \circ t &= e \circ r \\ &= e \circ p \circ u \\ &= e \circ q \circ u \\ &= e \circ s \\ &= h \circ t \end{aligned}$$

補題 1.4 より $e \times e$ は正則エピであるので、regular category の定義 1.3 (iii) より、t が (正則) エピとなり、$g = h$ が成り立つ。 □

補題 1.6　補題 1.5 において、m は f を分解する最小の部分対象である。

定義 1.7（Change of Base Functor）　Regular category $\mathcal{C}$ において、任意の射 $f : A \to B$ は次の change of base functor を導出する。

$$f^* : \mathsf{Sub}(B) \to \mathsf{Sub}(A)$$

モノ射の引き戻しはモノ射であるので、この定義は実際 well-defined である。

補題 1.8　Regular category $\mathcal{C}$ において、射 $f : A \to B$ から導出された change of base functor $f^* : \mathsf{Sub}(B) \to \mathsf{Sub}(A)$ は左随伴

$$\exists_f : \mathsf{Sub}(A) \to \mathsf{Sub}(B)$$

を持つ。

証明　初めに、任意の $m \in \mathsf{Sub}(A)$ について、$\exists_f m$ を「$f \circ m$ の像」と定義する。2 つの部分対象 $m_1 : C_1 \to A$ と $m_2 : C_2 \to B$ について、

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sub}(B)}(\exists_f m_1, m_2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{Sub}(A)}(m_1, f^* m_2) \tag{2}$$

が (自然に) 成り立つことを示す。射 $f \circ m_1$ が

$$f \xrightarrow{e} \mathrm{im}(f \circ m_1) \xrightarrow{\exists_f m_1} A$$

のように分解されるとする。

(i) $\mathsf{Sub}(B)$ の射 $g : \exists_f m_1 \to m_2$ が与えられたとする。以下の図式において、

$$\begin{aligned} f \circ m_1 &= \exists_f m_1 \circ e \\ &= (m_2 \circ g) \circ e && (\text{補題 } 1.6 \text{ より}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[rrd, bend left, tail, "m_1"] \arrow[rd, dashed] \arrow[rdd, bend right, "g\circ e"'] & & \\
& f^*C_2 \arrow[r, tail, "f^*m_2"] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\
& C_2 \arrow[r, tail, "m_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

したがって引き戻しの普遍性により、

$$m_1 = f^* m_2 \circ \bar{g} \tag{3}$$

となる $\mathcal{C}$ の射 $\bar{g} : C_1 \to f^* C_2$ が存在する。m_1 と $f^* m_2$ がモノ射であることと、等式 3 により、$\bar{g}$ はモノ射になる。以上より、モノ射 $\bar{g}$ は $\mathsf{Sub}(A)$ の射 $m_1 \to f^* m_2$ になる。

(ii) $\mathsf{Sub}(A)$ の射 $h : m_1 \to f^* m_2$ が与えられたとする。

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[rrd, bend left, tail, "m_1"] \arrow[rd, tail, "h"] \arrow[rdd, bend right, "f'\circ h"'] & & \\
& f^*C_2 \arrow[r, tail, "f^*m_2"] \arrow[d, "f'"'] & A \arrow[d, "f"] \\
& C_2 \arrow[r, tail, "m_2"'] & B
\end{tikzcd}$$

すると、「引き戻しからの射影」$f' : f^* C_2 \to C_2$ と合成することで、射 $f' \circ h : C_1 \to C_2$ を構成できる。上記の図式において、$m \circ f' \circ h = f \circ m_1$ が明らかに成り立つので、補題 1.6 より、$\mathsf{Sub}(B)$ の射 $\bar{h} : \exists_f m_1 \to m_2$ が存在する。

$\mathsf{Sub}(A)$ と $\mathsf{Sub}(B)$ はどちらも半順序集合なので、それらの Hom 集合は高々 1 つの要素しか持たない。したがって同型 2 が自然に成り立つ。 □

2 Regular Logic

定義 2.1（Many-sorted Signature） Many-sorted signature Σ とは、以下のデータから成る組 $\langle S, \Omega \rangle$ である。

(i) Sort の集合 S
(ii) 各 sorting に対して、operator symbol の集合を返す写像 $\Omega : S^* \times S \to \mathbf{Set}$

（ここで、集合の宇宙 U が存在して、$\mathbf{Set}$ は U-small な集合全体の集合とする。）

定義 2.2（文脈） 可算無限個の変数の集合 $\mathbf{Var}$ が存在すると仮定する。Many-sorted signature Σ が与えられたとき、**文脈** (context) を有限部分写像 $\Gamma : \mathbf{Var} \rightharpoonup S$ と定義する。

定義 2.3（項） **項** $\Gamma \vdash t : A$ を、以下のように帰納的に定義する。

$$\textsc{Var}\ \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad \textsc{Operation}\ \frac{\Gamma \vdash t_i : A_i \ \ (1 \leq i \leq n)}{\Gamma \vdash o(t_1, \ldots, t_n) : A}\ o \in \Omega(A_1, \ldots A_n, A)$$

定義 2.4（Regular Signature） Regular signature とは、以下のデータから成る組 $\langle \Sigma, R \rangle$ である。

(i) Many-sorted signature Σ
(ii) 各 sorting に対して、relation symbol の集合を返す写像 $R : S^* \to \mathbf{Set}$

定義 2.5（論理式） Regular signature $\langle \Sigma, R \rangle$ に対して、論理式 $\Gamma \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}$ を次のように定義する。

$$\frac{\Gamma \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}}{\Gamma, x : A \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}} \qquad \frac{\Gamma, x : A, y : A \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}}{\Gamma, x : A \vdash [x/y]\rho\ \ \mathsf{Prop}} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop} \qquad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash [t/x]\rho\ \ \mathsf{Prop}} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top\ \ \mathsf{Prop}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop} \qquad \Gamma \vdash \psi\ \ \mathsf{Prop}}{\Gamma \vdash \rho \wedge \psi\ \ \mathsf{Prop}} \qquad \frac{\Gamma \vdash s : A \qquad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \vdash s =_A t\ \ \mathsf{Prop}} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}}{\Gamma \vdash \exists x : A.\rho\ \ \mathsf{Prop}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash t_i : A_i \ \ (1 \leq i \leq n)}{\Gamma \vdash r(t_1, \ldots, t_n)\ \ \mathsf{Prop}}\ r \in R(A_1, \ldots, A_n)$$

定義 2.6（命題文脈） Regular signature $\langle \Sigma, R \rangle$ が与えられたとき、文脈 Γ に対して、**命題文脈** (proposition context) Δ を、論理式 $\Gamma \vdash \rho\ \ \mathsf{Prop}$ の多重集合と定義する。

定義 2.7（Regular Theory） Regular theory とは、以下のデータから成る組である。

(i) Regular signature $\langle \Sigma, R \rangle$
(ii) 公理 $\Gamma \mid \Delta \vdash \rho$ の集合 $\mathcal{A}$

定義 2.8（Entailment） Regular theory $\langle\langle\Sigma, R\rangle, \mathcal{A}\rangle$ が与えられたとき、entailment 関係 $\Gamma \mid \Delta \vdash \rho$ を次のように定義する。

Structural rules:

$$\textsc{Axiom}\ \frac{}{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho}\ (\Gamma \mid \Delta \vdash \rho) \in \mathcal{A} \qquad \textsc{Identity}\ \frac{}{\Gamma \mid \Delta, \rho \vdash \rho} \qquad \textsc{Cut}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho \quad \Gamma \mid \Delta, \rho \vdash \psi}{\Gamma \mid \Delta \vdash \psi} \qquad \textsc{Weaken}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho}{\Gamma, x : A \mid \Delta \vdash \rho}$$

$$\textsc{Contract}\ \frac{\Gamma, x : A, y : A \mid \Delta \vdash \rho}{\Gamma, x : A \mid [x/y]\Delta \vdash [x/y]\rho} \qquad \textsc{WeakenProp}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho}{\Gamma \mid \Delta, \psi \vdash \rho} \qquad \textsc{ContractProp}\ \frac{\Gamma \mid \Delta, \psi, \psi \vdash \rho}{\Gamma \mid \Delta, \psi \vdash \rho} \qquad \textsc{Subst}\ \frac{\Gamma, x : A \mid \Delta \vdash \rho \quad \Gamma \vdash t : A}{\Gamma \mid [t/x]\Delta \vdash [t/x]\rho}$$

Logical rules:

$$\top\mathrm{R}\ \frac{}{\Gamma \mid \Delta \vdash \top} \qquad \top\mathrm{L}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho}{\Gamma \mid \Delta, \top \vdash \rho} \qquad \wedge\mathrm{R}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho \quad \Gamma \mid \Delta \vdash \psi}{\Gamma \mid \Delta \vdash \rho \wedge \psi} \qquad \wedge\mathrm{L}\ \frac{\Gamma \mid \Delta, \rho, \psi \vdash \phi}{\Gamma \mid \Delta, \rho \wedge \psi \vdash \phi}$$

$$\exists\mathrm{R}\ \frac{\Gamma \vdash t : A \quad \Gamma \mid \Delta \vdash [t/x]\rho}{\Gamma \mid \Delta \vdash \exists x : A.\rho} \qquad \exists\mathrm{L}\ \frac{\Gamma \vdash \psi\ \mathsf{Prop} \quad \Gamma, x : A \mid \Delta, \rho \vdash \psi}{\Gamma \mid \Delta, \exists x : A.\rho \vdash \psi} \qquad =\!\textsc{Refl}\ \frac{\Gamma \vdash t : A}{\Gamma \mid \Delta \vdash t =_A t} \qquad =\!\textsc{Sym}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash s =_A t}{\Gamma \mid \Delta \vdash t =_A s}$$

$$=\!\textsc{Trans}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash s =_A t \quad \Gamma \mid \Delta \vdash t =_A u}{\Gamma \mid \Delta \vdash s =_A u} \qquad =\!\textsc{Cong}\ \frac{\Gamma \mid \Delta \vdash s_i =_{A_i} t_i \ \ (1 \leq i \leq n)}{\Gamma \mid \Delta \vdash o(s_1, \ldots, s_n) =_A o(t_1, \ldots, t_n)}\ o \in \Omega(A_1, \ldots, A_n, A)$$

$$=\!\mathrm{L}\ \frac{\Gamma, x : A \mid [x/y]\Delta \vdash [x/y]\rho}{\Gamma, x : A, y : A \mid \Delta, x =_A y \vdash \rho}$$

2.1 圏論的意味論

定義 2.9（Many-Sorted Signature のモデル） Σ を Many-sorted signature とする。有限積を持つ圏 $\mathcal{C}$ における**モデル**とは、各 sort A に対して、$\mathcal{C}$ の対象 $[\![A]\!]$ を割り当て、各 operator symbol $o \in \Omega(A_1, \ldots A_n, A)$ に対して、$\mathcal{C}$ の射 $[\![o]\!] : [\![\Pi_i A_i]\!] \to [\![A]\!]$ を割り当てるもののことである。

Σ のモデル $\mathcal{M}$ が与えられたとき、$[\![\Gamma]\!]$ を次のように定義する。

$$[\![\cdot]\!] = 1$$
$$[\![\Gamma, A]\!] = [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]$$

また、$[\![\Gamma \vdash t : A]\!]$ を次のように定義する。

$$[\![\Gamma, x : A \vdash x : A]\!] = \pi_2$$
$$[\![\Gamma \vdash o(t_1, \ldots, t_n) : A]\!] = [\![o]\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle$$

定義 2.10（Regular Signature の Structure） Regular signature $\langle \Sigma, R \rangle$ の structure は、Σ のモデル $\mathcal{M}$ と、以下のデータから成る。

(i) 各 relation symbol $r \in R(A_1, \ldots, A_n)$ に対して、部分対象 $[\![r]\!] \in \mathsf{Sub}(\prod_i [\![A_i]\!])$ の割り当て

Regular signature の structure $\mathcal{M}$ が与えられたとき、論理式 $\Gamma \vdash \rho$ Prop は、regular category における部分対象 $[\![\Gamma \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!] \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$ として表される。

(i) $[\![\Gamma \vdash \top \ \ \mathsf{Prop}]\!] = \mathrm{id}_\Gamma \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$

(ii) $[\![\Gamma \vdash \rho \wedge \psi \ \ \mathsf{Prop}]\!] = [\![\Gamma \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!] \circ \pi_1 = [\![\psi]\!] \circ \pi_2 \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$

$$\begin{tikzcd} A \times_{[\![\Gamma]\!]} B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, "[\![\psi]\!]"] \\ A \arrow[r, "[\![\Gamma \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!]"'] & [\![\Gamma]\!] \end{tikzcd}$$

モノ射の、任意の射に沿った引き戻しはモノ射であるので、この引き戻しは実際部分対象になる。

(iii) $[\![\Gamma \vdash s =_A t \ \ \mathsf{Prop}]\!] = m \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "m"] & {[\![\Gamma]\!]} \arrow[r, shift left, "[\![s]\!]"] \arrow[r, shift right, "[\![t]\!]"'] & {[\![A]\!]} \end{tikzcd}$$

このイコライザ図式において、m は正則モノ (反対圏における正則エピ) なので、モノ射である。

(iv) $[\![\Gamma \vdash \exists x : A.\rho \ \ \mathsf{Prop}]\!] = \exists_\pi([\![\Gamma, x : A \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!]) \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$

(v) $[\![\Gamma \vdash r(t_1, \ldots, t_n) \ \ \mathsf{Prop}]\!] = \langle [\![t_1]\!], \ldots, [\![t_n]\!] \rangle^* [\![r]\!] \in \mathsf{Sub}([\![\Gamma]\!])$

定義 2.11（Regular Theory のモデル） Regular theory $\langle \langle \Sigma, R \rangle, \mathcal{A} \rangle$ の**モデル**とは、$\langle \Sigma, R \rangle$ の structure であって、各 $(\Gamma \mid \Delta \vdash \rho) \in \mathcal{A}$ について、

$$[\![\Delta]\!] \leq [\![\Gamma \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!]$$

が成り立つようなもののことである。

定理 2.12（健全性） Regular theory のモデルが与えられたとき、entailment 関係 $\Gamma \mid \Delta \vdash \rho$ が導出可能ならば、$[\![\Delta]\!] \leq [\![\Gamma \vdash \rho \ \ \mathsf{Prop}]\!]$ が成り立つ。

References

[1]Bart Jacobs. Categorical Logic and Type Theory. Vol. 141. Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. Elsevier Science, 1998. ISBN: 9780444508539.

[2]Jaap van Oosten. Basic Category Theory. 1995. URL: http://www.staff.science.uu.nl/~ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf.